Модел. и анализ информ. систем. Т. **21**, № **5** (2014) 148–161

УДК 541.1

Аттрактор в кольцевой структуре обобщенных нейронных элементов автогенераторного типа [1]

Коновалов Е.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000 Россия, г. Ярославль, ул. Советская, 14

e-mail: kinnarts@mail.ru

получена 1 ноября 2013

Ключевые слова: нейронные сети, модели нейронных элементов, обобщенный нейронный элемент, динамический аттрактор, кольцевые нейронные структуры

В статье изучается перспективная нейронная модель — обобщенный нейронный элемент (ОНЭ). Эта модель носит универсальный характер, объединяя свойства нейрона-автогенератора и нейрона-детектора. Исследуется кольцевая структура обобщенных нейронных элементов автогенераторного типа. В этой структуре изучается циклический режим последовательной генерации импульсов элементами кольца. Строится нелинейное отображение для рассогласований между импульсами соседних элементов. Доказывается существование неподвижной точки этого отображения (предельных рассогласований) и его устойчивость в малой окрестности неподвижной точки. Тем самым доказывается существование устойчивого колебательного режима нейронной активности (аттрактора) заданного вида. Параметрами аттрактора (величинами предельных рассогласований) можно управлять заранее, за счет выбора синаптических весов связей в кольце.

Модель обобщенного нейронного элемента (ОНЭ) была предложена автором настоящей статьи в [1] под первоначальным названием обобщенного нейронного автомата (ОНА). Данная модель универсальна в том смысле, что объединяет свойства нейрона-автогенератора (пейсмейкера) и нейрона-детектора. В статье рассмотрена задача о распространении импульсов (проведении возбуждения) по замкнутой кольцевой структуре, образованной обобщенными нейронными элементами автогенераторного типа. Эта задача успешно решается аналитическими методами. Показывается, что в кольцевой структуре можно выбрать синаптические веса таким образом, чтобы импульсы соседних элементов начинались через заранее заданные промежутки времени. Система бесконечно долго воспроизводит заранее заданную периодическую последовательность импульсов. Такое функционирование нейронной сети может быть интерпретировано как аттрактор, пригодный для хранения информации в динамическом виде.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31431.

В настоящей статье:

- приводится математическая модель обобщенного нейронного элемента;
- рассматривается организация колебаний в кольцевой структуре ОНЭ-автогенераторов;
- доказывается существование в данной структуре аттрактора заранее известного вида.

Приведем формальное описание модели обобщенного нейронного элемента. Это нейронная модель, функционирующая в непрерывном времени, которая задается набором следующих параметров:

- p — пороговое значение мембранного потенциала;
- r — равновесное значение мембранного потенциала;
- α — скоростной параметр;
- T_R — продолжительность периода рефрактерности (абсолютной невосприимчивости к внешнему воздействию);
- n — количество входов (синапсов);
- m — количество выходов (синапсов);
- $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — величины синаптических весов;
- T_m — продолжительность периода синаптического воздействия (время жизни медиаторов), $T_m < T_R$.

Положительные величины p, r, α, T_R и T_m не меняются с течением времени и одинаковы для всех элементов, входящих в состав нейронных сетей, состоящих из ОНЭ. Число входов n и выходов m для каждого элемента фиксировано, но, вообще говоря, может быть неодинаковым для разных элементов, в зависимости от архитектуры конкретной нейронной сети. Входы каждого элемента характеризуются величинами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, где n — число входов данного элемента. Синаптические веса q_i определяют эффективность входного воздействия. Если вес данного конкретного синаптического входа положителен, то воздействие через данный синапс считается возбудительным, в противном случае — тормозным. Каждый такой вес характеризует однонаправленную синаптическую связь, которая соединяет выход одного элемента и вход другого. В настоящей работе рассматриваются только связи с положительными весами.

Внутреннее состояние элемента в момент времени t задается следующими функциями:

- $u(t)$ — функция зависимости величины мембранного потенциала от момента времени t;

- $s(t)$ — состояние элемента;
- $\sigma(t)$ — мгновенный выходной импульс;

Функция $s(t)$ принимает следующие значения:

$$s(t) = \begin{cases} \text{восприимчивость} \\ \text{генерация импульса} \\ \text{рефрактерность} \end{cases}.$$

Функция $\sigma(t)$ равна единице, когда элемент генерирует выходной импульс (спайк). Этот импульс поступает на все m выходов данного элемента. В остальные моменты времени $\sigma(t) = 0$.

Входные импульсы $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, ..., $\sigma_n(t)$ зависят от момента времени t. А именно, $\sigma_i(t) = 1$ во все такие моменты времени t, когда по i-му входу пришел импульс. В остальные моменты времени $\sigma_i(t) = 0$.

Введем вспомогательные функции $\sigma_1^m(t)$, $\sigma_2^m(t)$, ..., $\sigma_n^m(t)$. При каждом отдельном $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $\sigma_i^m(t) = 1$ при всех $t \in [t^s; t^s + T_m]$, где t^s такие, что одновременно $s(t^s) = \{\text{восприимчивость}\}$ и $\sigma_i(t^s) = 1$. В остальные моменты времени $\sigma_i^m(t) = 0$. Таким образом, функции $\sigma_i^m(t)$ — ступенчатого вида. Ступени имеют единичную высоту и длину, равную величине T_m.

Опишем теперь функционирование обобщенного нейронного элемента. В произвольный момент времени t возможен один из трех вариантов:

- ОНЭ генерирует импульс, т.е. $s(t) = \{\text{генерация импульса}\}$;
- ОНЭ находится в состоянии рефрактерности, т.е. $s(t) = \{\text{рефрактерность}\}$;
- ОНЭ находится в состоянии восприимчивости, т.е. $s(t) = \{\text{восприимчивость}\}$.

I. Пусть $s(t) = \{\text{генерация импульса}\}$. При этом $u(t) = p$, $\sigma(t) = 1$. Выходной импульс распространяется по всем синаптическим выходам данного элемента. Импульс происходит мгновенно, после чего элемент переходит в состояние рефрактерности. То есть при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$: $s(t + \varepsilon) = \{\text{рефрактерность}\}$.

II. Пусть $s(t) = \{\text{рефрактерность}\}$. Тогда $u(t) = 0$, $\sigma(t) = 0$. В состоянии рефрактерности элемент невосприимчив к внешнему воздействию. Элемент находится в состоянии рефрактерности в течение промежутка времени T_R с момента генерации спайка, после чего переходит в состояние восприимчивости. То есть $s(t_1^{sp} + T_R) = \{\text{восприимчивость}\}$, где

$$t_1^{sp} = \max_{\tau < t}\{\tau : \sigma(\tau) = 1\}. \tag{1}$$

III. Пусть $s(t) = \{\text{восприимчивость}\}$. Тогда $\sigma(t) = 0$, а функция мембранного потенциала $u(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\dot{u} = \alpha(r + q - u), \tag{2}$$

где r — равновесное значение мембранного потенциала, α — скоростной параметр, а функция $q(t)$ определяется следующим образом:

$$q(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^m(t).$$

В качестве начального условия для уравнения (2) берется значение $u(t^0)$, которое определяется следующим образом:

$$u(t^0) = u(t^0 - 0),$$
$$t^0 = \begin{cases} t^*, \text{ если } t^* > t_1^{sp} + T_R \\ t_1^{sp} + T_R, \text{ если } t^* \le t_1^{sp} + T_R \end{cases},$$

где t_1^{sp} определяется из (1),

$$t^* = \max\{t^+; t^-\}, \qquad t^+ = \max_i \max_{\tau \le t} \{\tau : \sigma_i(\tau) = 1\},$$
$$t^- = \max_i \max_{\tau \le t} \{\tau : \sigma_i^m(\tau) = 1, \sigma_i^m(\tau + 0) = 0\}.$$

Здесь t_1^{sp} — момент последнего по времени импульса данного элемента, t^+ — момент последнего по времени входного сигнала на данный элемент, t^- — момент последнего по времени завершения какого-либо входного воздействия на данный элемент.

Элемент переходит в состояние генерации импульса, если величина мембранного потенциала $u(t)$ равна пороговому значению p. Т.е. $s(t_2^{sp}) = \{$генерация импульса$\}$, где

$$t_2^{sp} = \min_{\tau > t} \{\tau : u(\tau) = p\}.$$

Если при всех $\tau > t$ выполняется неравенство $u(\tau) < p$, то $s(\tau) = \{$восприимчивость$\}$ при всех $\tau > t$. В данном случае элемент не генерирует импульс.

Разобранные случаи полностью исчерпывают поведение обобщенного нейронного элемента. Формально определенная динамика мембранного потенциала обобщенного нейронного элемента соответствует развитию потенциала биологического нейрона. Она согласуется с "базовой нейронной моделью" [2]. Модель обобщенного нейронного элемента близка к модели биологического нейрона, построенной на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием [3]. При этом модель ОНЭ отличается простотой функционирования и позволяет избежать технических трудностей, связанных с интегрированием систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Кроме того, модель ОНЭ носит обобщенный характер. В частности, при $p < r$ элемент ведет себя как нейрон-автогенератор, а при $p > r$ — как нейрон-детектор.

Кольцевые структуры являются одним из характерных объектов изучения при моделировании различных нейронных сетей. Замкнутые кольцевые структуры уже давно обнаружены в биологических нейронных сетях, в том числе в человеческом мозге [4], [5]. Такие нейронные образования могут играть важную роль в механизмах памяти [6]. Одновременно подобные структуры обладают сравнительной простотой, что позволяет исследовать их поведение аналитическими методами. Важным вопросом при изучении нейронной сети является исследование режимов нейронной активности и доказательство их устойчивости. Среди таких режимов, возникающих в кольцевых структурах, основным является последовательное распространение волны нейронной активности по кольцу, например, по часовой стрелке.

Опишем кольцевую структуру ОНЭ-автогенераторов. Рассмотрим N обобщенных нейронных элементов ($N \geq 3$). Соединим данные элементы в кольцо и последовательно занумеруем их от 1 до N по часовой стрелке. Каждый $i-1$-й элемент имеет локальную синаптическую связь с i-м элементами ($i = 2, 3, \ldots, N$). Элемент с номером N связан с первым элементом. Других связей в кольце нет. Параметры p, r, α, T_R, T_m и $n = 1$ одинаковы для всех ОНЭ кольца. Условие $r > p$ определяет функционирование элементов кольца в режиме автогенераторов. Обозначим $q_{i-1,i}$ — синаптический вес связи, ведущей от $i-1$-го элемента к i-му элементу ($i = 2, 3, \ldots, N$). Синаптический вес связи, ведущей от N-го элемента к первому, обозначим $q_{N,1}$. При всех $i = 1, 2, \ldots, N$: $q_{i,i-1} > 0$. Полученную нейронную сеть будем называть кольцевой структурой ОНЭ-автогенераторов.

Будем решать следующую задачу: выбрать синаптические веса $q_{1,2}$, $q_{2,3}$, $\ldots$, $q_{N,1}$ так, чтобы в кольцевой структуре ОНЭ-автогенераторов существовал устойчивый колебательный режим, при котором элементы циклически генерируют импульсы в порядке возрастания их номеров. При этом установившимися с течением времени рассогласованиями в генерации импульсов между соседними элементами можно управлять заранее. Тем самым будет показано существование аттрактора. Отметим, что не утверждается единственность данного колебательного режима и его глобальная устойчивость.

Режим работы кольцевой структуры ОНЭ-автогенераторов, элементы которой генерируют импульсы через заданные промежутки времени, зависит от начальных условий. Обсудим два способа задания таких начальных условий. Задать начальное состояние системы элементов означает, что нужно указать для всех ОНЭ состояние в начальный момент времени. Для элементов, находящихся в состоянии восприимчивости, необходимо указать

- значения мембранных потенциалов $u(0)$;
- какие синапсы активны и сколько времени они будут находиться в активном состоянии;
- какие элементы осуществляют воздействие на каждый конкретный ОНЭ и сколько каждое такое воздействие будет длиться.

Для тех элементов, у которых $s(0) = \{$рефрактерность$\}$, нужно указать время, через которое они выйдут из состояния рефрактерности. Используя такую информацию, сложно проследить за динамикой системы.

Другой способ задания начального состояния системы элементов заключается в следующем. Определим для элементов сети априорные моменты их первых импульсов. При этом потребуем выполнения определенных условий для этих моментов импульсов. Такой способ и будет использован в настоящей статье. Можно показать, что эти два способа задания начального состояния системы эквивалентны.

Введем необходимые обозначения. Обозначим состояние i-го элемента кольцевой структуры как $s_i(t)$, а функцию его мембранного потенциала как $u_i(t)$. Поскольку у каждого ОНЭ кольцевой структуры оказывается по одному входу, то обозначим входную функцию i-го элемента для входа с весом $q_{i-1,i}$ как $\sigma_{i,1}^{m}(t)$. Пусть t_i^j — момент j-го импульса i-го элементов. В этих обозначениях $i = 1, 2, \ldots, N$, $j \geq 1$. Будем считать, что в нулевой момент времени N-й ОНЭ-автогенератор генерирует импульс. То есть $t_N^0 = 0$.

Разберем условия существования интересующего нас колебательного режима. Последовательность прохождения импульсов по кольцу (от 1-го элемента к N-му элементу) будем называть тактом прохождения волны. А именно, k-й такт начинается в момент времени t_1^k и продолжается до момента времени t_1^{k+1}.

Введем обозначения для временных рассогласований ξ_i^k между импульсами $i-1$-го и i-го элементов ($i = 1, 2, \ldots, N$) на k-м такте прохождения волны ($k = 1, 2, \ldots$). Положим:

$$\xi_i^k = \begin{cases} t_1^k - t_N^{k-1}, \text{ если } i = 1, \\ t_i^k - t_{i-1}^k, \text{ если } i > 1. \end{cases}$$

Для исследуемого режима распределение моментов импульсов элементов должно удовлетворять следующим условиям:

$$0 < \xi_i^k < T_m, \tag{3}$$

$$T_R < \sum_{j=1}^{N} \xi_j^k - \xi_i^k < T_A, \tag{4}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$; $k = 1, 2, \ldots$, а T_A — период автогенерации, определяемый из соотношения

$$e^{-\alpha(T_A - T_R)} = \frac{r-p}{r}. \tag{5}$$

Данное соотношение вытекает из описания модели ОНЭ в ситуации, когда $r > p$.

Определим теперь область в пространстве параметров, внутри которой существует описанный колебательный режим. Зададим область D возможных значений параметров $p, r, \alpha, T_R, T_m, q_{i-1,i}$ следующими неравенствами:

$$0 < p < r, \quad \alpha > 0, \quad 0 < T_m < T_R, \tag{6}$$

$$q_{i-1,i} > 0, \tag{7}$$

$$pe^{\alpha\xi_i^1} + (r + q_{i-1,i})(1 - e^{\alpha\xi_i^1}) > 0, \tag{8}$$

при всех $i = 1, 2, \ldots, N$. Необходимость и смысл последнего неравенства будут показаны далее.

Сформулируем лемму, которая связывает временные рассогласования на первом и втором тактах прохождения волны возбуждения по кольцевой структуре ОНЭ-пейсмейкеров. В целях удобства, временные рассогласования ξ_i^1 между импульсами $i-1$-го и i-го элементов на первом такте прохождения волны переобозначим как

ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Аналогично временные рассогласования ξ_i^2 между импульсами $i-1$-го и i-го элементов на втором такте прохождения волны переобозначим как ξ_i' $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Применительно к рассогласованиям ξ_i и ξ_i' условия (3) — (4) будут выглядеть следующим образом:

$$0 < \xi_i < T_m, \quad 0 < \xi_i' < T_m, \tag{9}$$

$$T_R < \sum_{j=1}^{N} \xi_j - \xi_i < T_A, \quad T_R < \sum_{j=1}^{N} \xi_j' - \xi_i' < T_A, \tag{10}$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$.

Лемма 1. *Пусть величины ξ_i и ξ_i' удовлетворяют условиям (9) — (10) и*

$$F(\xi, \xi') = \begin{pmatrix} r\exp\left(-\alpha\Big(\sum\limits_{i=2}^{N} \xi_i - T_R\Big)\right) + q_{N,1} - e^{\alpha\xi_1'}(r - p + q_{N,1}) \\ r\exp\left(-\alpha\Big(\sum\limits_{i=1}^{k-1} \xi_i' + \sum\limits_{i=k+1}^{N} \xi_i - T_R\Big)\right) + q_{k-1,k} - e^{\alpha\xi_k'}(r - p + q_{k-1,k}) \\ r\exp\left(-\alpha\Big(\sum\limits_{i=1}^{N-1} \xi_i' - T_R\Big)\right) + q_{N-1,N} - e^{\alpha\xi_N'}(r - p + q_{N-1,N}) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $k = 2, 3, \ldots, N-1$.

Тогда $F(\xi, \xi') = 0$.

Идея доказательства заключается в следующем. Зная моменты времени t_i^1, мы можем вычислить момент времени t_1^2 генерации второго спайка первым элементом и указать рассогласование ξ_1' между вторым спайком первого элемента и первым спайком N-го элемента. Далее, рассуждения проводятся последовательно для второго, третьего и так далее элементов. Определяются новые рассогласования ξ_i' между спайками ОНЭ на втором такте прохождения волны возбуждения по кольцу. При этом величина ξ_i' выражается через величины $\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \ldots, \xi_N, \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{i-1}'$. Таким образом и возникает система (11).

Переходим непосредственно к доказательству леммы. Рассмотрим поведение первого элемента. На промежутке времени $[t_1^1 + T_R; t_N^1]$ первый элемент находится в состоянии восприимчивости. Кроме того, он не испытывает внешнего воздействия. Поэтому функция мембранного потенциала первого элемента описывается дифференциальным уравнением (2), где $q = 0$. Его решение, с учетом начального условия $u_1(t_1^1 + T_R) = 0$:

$$u_1(t) = r - r\exp\big(-\alpha(t - \xi_1 - T_R)\big).$$

В частности, в момент времени t_N^1 величина мембранного потенциала первого элемента $u_1(t_N^1)$ выражается следующим образом:

$$u_1(t_N^1) = r - r\exp\big(-\alpha(t_N^1 - \xi_1 - T_R)\big). \tag{12}$$

По условию (9): $\xi_1' = t_1^2 - t_N^1 > 0$. Поэтому $u_1(t_N^1) < p$.

Рассмотрим теперь промежуток времени $[t_N^1; t_1^2]$. На этом промежутке на первый элемент осуществляется воздействие со стороны N-го элемента, который в момент времени t_N^1 сгенерировал импульс. Поэтому функция мембранного потенциала первого элемента описывается дифференциальным уравнением (2), где $q = q_{N,1}$. В качестве начального условия фигурирует величина $u_1(t_N^1)$. Решение имеет вид:

$$u_1(t) = r + q_{N,1} + \exp\big(-\alpha(t - t_N^1)\big)[u_1(t_N^1) - r - q_{N,1}]. \qquad (13)$$

Подставляя выражение (12) для величины $u_1(t_N^1)$ в формулу (13), получаем:

$$u_1(t) = r + q_{N,1} + \exp\big(-\alpha(t - t_N^1)\big)\big[-r\exp\big(-\alpha(t_N^1 - \xi_1 - T_R)\big) - q_{N,1}\big].$$

В момент времени $t_1^2 = t_N^1 + \xi_1'$ происходит генерация импульса первым элементом. Поэтому его мембранный потенциал в момент времени t_1^2 должен быть равен пороговому значению p, то есть $u_1(t_N^1 + \xi_1') = p$. Получаем:

$$r + q_{N,1} + \exp\big(-\alpha\xi_1'\big)\big[-r\exp\big(-\alpha(t_N^1 - \xi_1 - T_R)\big) - q_{N,1}\big] = p.$$

По определению $t_N^1 - \xi_1 = \sum\limits_{i=2}^{N}\xi_i$, поэтому

$$r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum_{i=2}^{N}\xi_i - T_R\Big)\bigg) + q_{N,1} = e^{\alpha\xi_1'}(r - p + q_{N,1}). \qquad (14)$$

Аналогично выписывается уравнение для k-го элемента кольца (k=$2, 3, \ldots, N-1$):

$$r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i' + \sum_{i=k+1}^{N}\xi_i - T_R\Big)\bigg) + q_{k-1,k} = e^{\alpha\xi_k'}(r - p + q_{k-1,k}). \qquad (15)$$

Для N-го элемента:

$$r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum_{i=1}^{N-1}\xi_i' - T_R\Big)\bigg) + q_{N-1,N} = e^{\alpha\xi_N'}(r - p + q_{N-1,N}). \qquad (16)$$

Объединяя уравнения (14) — (16), получаем в точности систему (11). Лемма доказана.

Результат леммы 1 может быть легко обобщен на случай двух любых подряд идущих тактов распространения волны. Тогда в системе (11) будут фигурировать не рассогласования ξ_i и ξ_i' на первых двух тактах волны, а величины ξ_i^n и ξ_i^{n+1} ($n = 2, 3, \ldots$), представляющие собой рассогласования на n-м и $n+1$-м тактах. А именно, имеет место следствие из леммы 1.

Следствие 1. *Пусть в кольцевой структуре ОНЭ-автогенераторов существует описанный колебательный режим на протяжении, по крайней мере, $n+1$ первых тактов. При этом для величин ξ_i^n и ξ_i^{n+1} выполняются условия (3) — (4).*

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum\limits_{i=2}^{N}\xi_i^k - T_R\Big)\bigg) + q_{N,1} = e^{\alpha\xi_1^{k+1}}(r - p + q_{N,1}) \\ r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum\limits_{i=1}^{l-1}\xi_i^{k+1} + \sum\limits_{i=l+1}^{N}\xi_i^k - T_R\Big)\bigg) + q_{l-1,l} = e^{\alpha\xi_l^{k+1}}(r - p + q_{l-1,l}) \\ r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum\limits_{i=1}^{N-1}\xi_i^{k+1} - T_R\Big)\bigg) + q_{N-1,N} = e^{\alpha\xi_N^{k+1}}(r - p + q_{N-1,N}) \end{cases}, \qquad (17)$$

где $l = 2, 3, \dots, N-1$, а k — любое натуральное число.

Доказательство данного следствия аналогично доказательству леммы 1. Случай $n = 1$ в точности соответствует этой лемме.

Таким образом, временные рассогласования на третьем такте прохождения волны возбуждения по кольцу выражаются через соответствующие рассогласования на втором такте. Возникает итерационный процесс. В дальнейшем будет доказано, что он сходится. Но прежде чем доказать сходимость к предельным рассогласованиям, покажем существование неподвижной точки отображения, соответствующего системе (17).

Обозначим через ξ_i^0 ожидаемые в стационарном режиме значения промежутков времени между импульсами $i-1$-го и i-го элементов ($i = 1, \dots, N$). Полный период системы есть $\overline{T} = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i^0$. При этом предельные рассогласования должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} 0 < \xi_i^0 < T_m \\ T_R < \sum\limits_{j=1}^{N} \xi_j^0 - \xi_i^0 < T_A \end{cases}, \tag{18}$$

при всех $i = 1, 2, \dots, N$.

Сформулируем и докажем лемму о существовании неподвижной точки отображения (17).

Лемма 2. *Пусть величины ξ_i^0 ($i = 1, 2, \dots, N$) удовлетворяют условиям (18), параметры сети — ограничениям (6), а веса $q_{i-1,i}$ определены формулами*

$$\begin{cases} q_{N,1} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_1^0}-1}\left[r - p - re^{-\alpha(\overline{T}-T_R)}\right] \\ q_{k-1,k} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_k^0}-1}\left[r - p - re^{-\alpha(\overline{T}-T_R)}\right] \\ q_{N-1,N} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_N^0}-1}\left[r - p - re^{-\alpha(\overline{T}-T_R)}\right] \end{cases}, \tag{19}$$

где $k = 2, 3, \dots, N-1$.

Тогда отображение (17) имеет неподвижную точку $\overline{\xi^0} = (\xi_1^0, \dots, \xi_N^0)$ и выполнены условия (7) — (8).

Доказательство. Рассмотрим первое уравнение системы (17) и подставим в него вместо рассогласований ξ_i^k и ξ_1^{k+1} предельные рассогласования ξ_i^0 и ξ_1^0 соответственно. Последовательно получим:

$$r \exp\left(-\alpha\Big(\sum_{i=2}^{N} \xi_i^0 - T_R\Big)\right) + q_{N,1} = e^{\alpha\xi_1^0}(r - p + q_{N,1}),$$

$$q_{N,1}e^{-\alpha\xi_1^0} - q_{N,1} = r - p - re^{-\alpha\xi_1^0} \exp\left(-\alpha\Big(\sum_{i=2}^{N} \xi_i^0 - T_R\Big)\right),$$

$$q_{N,1} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_1^0} - 1}\left[r - p - re^{-\alpha(\overline{T}-T_R)}\right]. \tag{20}$$

Аналогично выражаем через предельные рассогласования синаптические веса $q_{1,2}$, …, $q_{N-1,N}$ из остальных уравнений системы (17):

$$q_{k-1,k} = \frac{1}{e^{-\alpha\xi_k^0} - 1}[r - p - re^{-\alpha(\overline{T} - T_R)}], \tag{21}$$

где $k = 2, 3, \ldots, N$. Выражения (20) — (21) совпадают с равенствами (19). Если распорядиться синаптическими весами в соответствии с формулами (19), то отображение (17) будет иметь неподвижную точку $\overline{\xi^0} = (\xi_1^0, \ldots, \xi_N^0)$.

Проверим теперь выполнение условий (7) — (8). В формулах (19) знаменатели всех дробей отрицательны, так как по условию (18): $xi_i^0 > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Числители всех дробей также отрицательны. Это также следует из условий (18), в частности условия $T_R < \overline{T} - \xi_i^0 < T_A$. Отсюда вытекают неравенства $q_{i-1,i} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Для доказательства любого из неравенств (8) подставим в него соответствующее выражение веса $q_{i-1,i}$ из (19). Получаем:

$$r\big[1 - \exp\big(-\alpha(\overline{T} - T_R - \xi_i^0)\big)\big] > 0. \tag{22}$$

Из условий (18), в частности условия $T_R < \overline{T} - \xi_i^0$, следует, что данное неравенство верно. Значит, верно и соответствующее неравенство (8). Лемма доказана.

Теперь сформулируем и докажем теорему об устойчивости исследуемого режима нейронной активности.

Теорема 1. *Пусть величины ξ_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, N)$ удовлетворяют условиям (18), параметры сети — ограничениям (6), а веса $q_{i-1,i}$ определены формулами (19).*

Тогда в окрестности неподвижной точки существует устойчивый режим, при котором импульсы ОНЭ-автогенераторов циклически следуют в порядке возрастания номеров. Предельные временные рассогласования между спайками $i-1$-го и i-го элементов $(i = 1, 2, \ldots, N)$ принимают значения ξ_i^0.

Доказательство. Сделаем априорное предположение, что условия (3) — (4) выполнены на любом такте прохождения волны. О выполнимости такого допущения позаботимся позднее.

Существование неподвижной точки $\overline{\xi^0}$ уже доказано. Исследуем вопрос об устойчивости точки $\overline{\xi^0}$. Как было показано, система (17) для рассогласований ξ_i^k и ξ_i^{k+1} на k-м и $k+1$-м тактах волны аналогична системе (11) для рассогласований ξ_i и ξ_i' на первых двух тактах. Поэтому для удобства обозначений будем в дальнейшем рассматривать систему (11), имея в виду рассогласования на двух произвольных подряд идущих тактах.

Рассмотрим первое уравнение системы (11):

$$r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum_{i=2}^{N}\xi_i - T_R\Big)\bigg) + q_{N,1} = e^{\alpha\xi_1'}(r - p + q_{N,1}).$$

Представим рассогласования ξ_i и ξ_i' $(i = 1, \ldots, N)$ следующим образом: $\xi_i = \xi_i^0 + \eta_i$ и $\xi_i' = \xi_i^0 + \eta_i'$, где ξ_i^0 — предельные рассогласования, $|\eta_i| \ll 1$, $|\eta_i'| \ll 1$. Имеем

$$r\exp\bigg(-\alpha\Big(\sum_{i=2}^{N}(\xi_i^0 + \eta_i) - T_R\Big)\bigg) + q_{N,1} = (r - p + q_{N,1})e^{\alpha(\xi_1^0 + \eta_1')}. \tag{23}$$

Используя стандартное разложение в ряд Тейлора и опуская слагаемые, содержащие степени η_i и η_i' выше первой, линеаризуем (23). Получим

$$r \exp\left(-\alpha\Big(\sum_{i=2}^{N} \xi_i^0 - T_R\Big)\right)\Big(1 - \alpha \sum_{i=2}^{N} \eta_i\Big) + q_{N,1} = (r - p + q_{N,1}) e^{\alpha \xi_1^0}(1 + \alpha \eta_1'),$$

или же

$$r \exp\left(-\alpha\Big(\sum_{i=1}^{N} \xi_i^0 - T_R\Big)\right)\Big(1 - \alpha \sum_{i=2}^{N} \eta_i\Big) + q_{N,1} e^{-\alpha \xi_1^0} = (r - p + q_{N,1})(1 + \alpha \eta_1'). \quad (24)$$

Из первого равенства системы (19), связывающего синаптический вес $q_{N,1}$ с предельными рассогласованиями ξ_i^0, получаем:

$$r \exp\left(-\alpha\Big(\sum_{i=1}^{N} \xi_i^0 - T_R\Big)\right) = r - p - q_{N,1}(e^{-\alpha \xi_1^0} - 1). \quad (25)$$

Подставляем в левую часть формулы (24) выражение (25):

$$[r - p - q_{N,1}(e^{-\alpha \xi_1^0} - 1)]\Big(1 - \alpha \sum_{i=2}^{N} \eta_i\Big) + q_{N,1} e^{-\alpha \xi_1^0} = (r - p + q_{N,1})(1 + \alpha \eta_1').$$

После раскрытия скобок и взаимного уничтожения слагаемых, это уравнение приобретает следующий вид:

$$A_1 \eta_1' + \eta_2 + \ldots + \eta_N = 0, \quad (26)$$

где

$$A_1 = \frac{r - p + q_{N,1}}{r - p + q_{N,1} - q_{N,1} e^{-\alpha \xi_1^0}}.$$

Аналогичные преобразования остальных $N-1$ уравнений системы (11) с использованием соответствующих выражений системы (19) приводят к уравнениям:

$$\eta_1' + \ldots + \eta_{k-1}' + A_k \eta_k' + \eta_{k+1} + \ldots + \eta_N = 0, \quad (27)$$

при $k = 2, \ldots, N-1$, где

$$A_k = \frac{r - p + q_{k-1,k}}{r - p + q_{k-1,k} - q_{k-1,k} e^{-\alpha \xi_k^0}}.$$

Наконец,

$$\eta_1' + \ldots + \eta_{N-1}' + A_N \eta_N' = 0, \quad (28)$$

где

$$A_N = \frac{r - p + q_{N-1,N}}{r - p + q_{N-1,N} - q_{N-1,N} e^{-\alpha \xi_N^0}}.$$

Уравнения (26) — (28), объединенные в систему, задают следующее отображение:

$$\begin{cases} A_1\eta_1' + \eta_2 + \ldots + \eta_N = 0 \\ \eta_1' + \ldots + \eta_{k-1}' + A_k\eta_k' + \eta_{k+1} + \ldots + \eta_N = 0 \\ \eta_1' + \ldots + \eta_{N-1}' + A_N\eta_N' = 0 \end{cases} \qquad (29)$$

Общий вид данного отображения:

$$B_1\eta' + B_2\eta = 0,$$

где матрицы B_1 и B_2 следующего вида:

$$B_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & A_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & A_N \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу B такую, что:

$$B = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & A_2 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & A_N \end{pmatrix}.$$

Так как элементами кольца являются ОНЭ-автогенераторы, то выполняется условие $r > p$. При всех $k = 1, 2, \ldots, N$ имеют место неравенства $q_{k-1,k} > 0$, $r - p + q_{k-1,k} > 0$ и $r - p + q_{k-1,k} - q_{k-1,k}e^{-\alpha\xi_k^0} > 0$. Поэтому $A_k > 1$ при всех $k = 1, 2, \ldots, N$. Итерационные соотношения (29) представляют собой метод Зейделя для решения системы линейных уравнений с положительно определенной и симметрической матрицей B. Метод Зейделя сходится в данном случае к нулю. Итак, сходимость отображения (11) в линейном приближении в окрестности неподвижной точки доказана. Из сходимости метода Зейделя и гладкости исходного отображения (11) следует, что нелинейная часть отображения (11) не нарушит его сходимости к предельной точке в малой ее окрестности.

Для предельной точки $\overline{\xi^0}$ выполнены условия (18). По лемме 2 выполняются условия (7) — (8). Следовательно, применима лемма 1 при $\overline{\xi^1} = (\xi_1^1, \ldots, \xi_N^1) = \overline{\xi^0}$. По следствию 1 получаем, что $\overline{\xi^k} = (\xi_1^k, \ldots, \xi_N^k) = \overline{\xi^0}$. Поскольку все области открытые, то если начальная точка $\overline{\xi^1} = (\xi_1^1, \ldots, \xi_N^1)$ лежит в малой окрестности неподвижной точки $\overline{\xi^0}$, то априорные допущения (3) — (4) будут выполнены на любом такте прохождения волны. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает важное следствие.

Следствие 2. *Пусть в кольцевой структуре ОНЭ-автогенераторов существует устойчивый режим нейронной активности, при котором импульсы элементов циклически следуют в порядке возрастания номеров. Пусть предельные значения временных рассогласований между импульсами $i-1$-го и i-го элементов ($i = 1, 2, \ldots, N$) принимают значения ξ_i^0.*

Тогда для всех $i, j = 1, 2, \ldots, N$ *имеют место следующие соотношения:*

$$\frac{q_{i-1,i}}{q_{j-1,j}} = \frac{e^{-\alpha\xi_j^0} - 1}{e^{-\alpha\xi_i^0} - 1}. \tag{30}$$

Доказательство. Если $i = j$, то получается тривиальное тождество. В случае $i \neq j$ достаточно взять соответствующие выражения синаптических весов $q_{i-1,i}$ и $q_{j-1,j}$ из системы (19). Разделив одно из них на другое, получаем в точности соотношение (30). Следствие доказано.

Таким образом, задав заранее пару синаптических весов $q_{i-1,i}$ и $q_{j-1,j}$ и обеспечив существование устойчивого колебательного режима в кольце, можно легко управлять предельными рассогласованиями при генерации спайков соседними элементами. Следовательно, в исследуемой сети продемонстрировано не только существование аттрактора, но и установлена возможность управлять его параметрами, в данном случае предельными рассогласованиями.

Решена задача о синтезе системы, хранящей в динамическом виде заданную последовательность импульсов. Эта задача имеет самостоятельный интерес. Кроме того, если принять гипотезу о волновой природе памяти, то кольцевую структуру ОНЭ-автогенераторов можно рассматривать как модель нейронной популяции, хранящей след памяти. При этом величины рассогласований между импульсами — носители информации. Полученные результаты могут найти применение в других задачах по исследованию возможностей ОНЭ-сетей, а также при их практической реализации на нейрокомпьютерах.

Список литературы

1. Коновалов Е.В. Устойчивый колебательный режим в нейронной сети обобщенных нейронных автоматов-детекторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 2. С. 30–35. [Konovalov E.V. Ustoychivyy kolebatelnyy rezhim v neyronnoy seti obobshchennykh neyronnykh avtomatov-detektorov // Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem. 2007. T. 14, № 2. S. 30–35 (in Russian)].

2. Крюков В.И., Борисюк Г.Н., Борисюк Р.М., Кириллов А.Б., Коваленко Е.И. Метастабильные и неустойчивые состояния в мозге. Пущино: НЦБИ АН СССР, 1986. [Kryukov V.I., Borisyuk G.N., Borisyuk R.M., Kirillov A.B., Kovalenko E.I. Metastabilnye i neustoychivye sostoyaniya v mozge. Pushchino: NTsBI AN SSSR, 1986 (in Russian)].

3. Майоров В.В., Мышкин И.Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т.2, № 11. С. 64–76. [Mayorov V.V., Myshkin I.Yu. Matematicheskoe modelirovanie neyronov seti na osnove uravneniy s zapazdyvaniem // Matematicheskoe modelirovanie. 1990. T.2, № 11. S. 64–76 (in Russian)].

4. Eccles J. C. The Physiology of Synapses. New York : Academic Press Inc., 1964.

5. Lorente de No R. Physiology of Nervous System. 3rd ed. / edited by J.F. Fulton. Oxford University Press, New York, 1949. P. 288–330.

6. Rosenblatt F. Principles of neurodynamics: perceptrons and the theory of brain mechanisms. Spartan Books, 1962.

Attractor in Circular Structure of Oscillatory Generalized Neural Elements

Konovalov E.V.

P.G. Demidov Yaroslavl State University,
Sovetskaya str., 14, Yaroslavl, 150000, Russia

Keywords: neural networks, models of neural element, generalized neural element, dynamical attractor, neural circular structure

A perspective model of a neuron cell — the generalized neural element (GNE) is studied in this article. The model has an universal character. It combines properties of a neuron-oscillator and a neuron-detector. In this structure cyclic sequential pulse generation elements of the ring are studied. A nonlinear mapping for mismatches between pulses of neighboring elements is constructed. We prove the existence of a fixed point of this mapping (threshold value of mismatches) and its stability in a small neighborhood of the fixed point. In doing so the existence of a stable oscillatory mode of neural activity (attractor) of a certain type is proved. The parameters of the attractor (threshold values of mismatches) can be controlled in advance, due to the choice of synaptic weights of the links in the ring.

Сведения об авторе:
Коновалов Евгений Владиславович,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры компьютерных сетей